Práctica 2: Dos Jugadores, Suma Cero

---

1. En un partido de ajedrez, comienza el Blanco moviendo una pieza, y luego mueve otra el Negro. La primer movida del Blanco y luego la del Negro es mover un peón (hay 8) o un caballo (hay 2) a una de dos casillas posibles. Cuántas estrategias tiene el Negro si sólo moverán una vez cada uno?

2. Demuestre que si una estrategia domina a toda estrategia pura, también domina toda estrategia mixta.

3. Encuentre el valor del juego $v(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Grafique $v(t)$.

4. Para las siguientes matrices, encuentre el valor del juego, y estrategias óptimas.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Sherlock Holmes y Moriarty, Morgestern y von Neumann (1944):** Sherlock Holmes huye de Londres a Dover para escapar del Prof. Moriarty. Moriarty puede tomar un tren expreso a Dover para atraparlo, pero hay una estación intermedia en Canterbury donde Holmes puede bajar y cambiar de transporte. Pero Moriarty lo sabe, y también para en Canterbury. Hallar el valor y las estrategias del juego si sus acciones pagan

		Sherlock Homes	
		Canterbury	*Dover*
Moriarty	*Canterbury*	100	−50
	Dover	0	100

Figure 1: Pagos propuestos por Morgestern y von Neumann, en algunas unidades.

6. Armar la matriz de pago, hallar el valor y estrategias óptimas de los siguientes juegos:

   a) Xérez y Yérez eligen uno de los números 1 ó 2. Si coinciden, Yérez le paga a Xérez el cuadrado del número elegido; si no, Xérez le paga 2 a Yérez. Es un juego justo?

   b) Xérez tiene $As\spadesuit$ y $8\heartsuit$. Yérez tiene $2\diamondsuit$ y $7\clubsuit$. Juegan simultáneamente una carta. Si son del mismo color, gana Xérez, si son de distinto color, gana Yérez. El ganador recibe tantos pesos como el número que indica la carta del rival.

   c) Yérez envía un mensaje con uno de sus correos Xérez, Yérez y Zérez. Xérez puede capturar a uno de los tres, y no podrá averiguarlo si no atrapa al correcto. Si elige al correcto, la posibilidad de averiguar el mensaje depende del mensajero, y es 3/4, 1/4, y 1/2.

7. Xérez quiere abrir una parrilla y Yérez quiere abrir dos. Hay locales disponibles ubicados en la avenida von Negestern a la altura 500, 1000 y 1500. Xérez y Yérez pueden decidir abrir su parrilla a la misma altura (uno de cada lado de la calle). La ubicación de un cliente es una variable aleatoria $\mathcal{U}[0, 2000]$ y se dirige a la parrilla más cercana (si hay dos en el mismo lugar, tira una moneda para decidir). El pago de Xérez es la probabilidad de que entre en su parrilla. Hallar el valor y estrategias óptimas.

8. Cacho es vendedor ambulante en el estadio de River. Si llueve, vende 500 choris a \$10 (le cuestan la mitad) cada uno. Si hay sol, vende sólo 100, y 1000 helados a \$5 (le cuestan \$2) cada uno. Tiene \$2500 para invertir, pero lo que no venda lo pierde. La Naturaleza tiene dos estrategias, sol - lluvia, y Cacho también, comprar para un día de sol o uno de lluvia. Si la probabilidad de lluvia es de 1/2, hallar la estrategia óptima de Cacho.

9. Una cebra puede cruzar un río por cuatro vados, sean a, b, c, d ordenados de norte a sur. Un cocodrilo puede esperar escondido en cualquiera de ellos. Si ambos eligen el mismo vado, el cocodrilo caza la cebra con probabilidad 1, si pasa por uno adyacente, la probabilidad de cazarla es $1/2$, y 0 si pasa por uno más alejado.

   a) Encuentre la matriz de este juego.
   b) Puede reducirlo a uno de 2×2?
   c) Hallar el valor y estrategias óptimas.

10. Demuestre que si un juego de $m \times n$ tiene dos puntos silla, ambos tienen el mismo valor.

11. Sea un juego con matriz diagonal. Calcular el valor del juego si

    a) uno de los términos diagonales es cero y el resto son positivos.
    b) uno de los términos es negativo y otros son positivos.
    c) todos son negativos.

12. Xérez elige uno de los números 1, 2, 3 y Yérez trata de adivinarlo. Si adivina, no paga nada. Si no, pierde el módulo de la diferencia entre el número propuesto y el elegido. Reduzca la matriz eliminando las estrategias dominadas y resuelva el juego de 2×2. Observe que Yérez tiene una estrategia pura que fue eliminada, y que esta estrategia domina la estrategia mixta óptima del juego de 2×2.

13. Armar la matriz y resolver cada juego, donde Yérez elige un número $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, y Xérez trata de adivinarlo. Los pagos de cada juego son los siguientes:

    a) si acierta el número j, gana 2^j, si no, no gana ni pierde nada.
    b) si acierta el número j, gana 1; si era más bajo, gana $1/2$, si era más alto, no gana ni pierde nada.
    c) si acierta el número j, gana 1; si era más bajo, pierde 1, si era más alto, no gana ni pierde nada.

14. Si $p = (52/143, 50/143, 41/143)$ es la estrategia óptima para Xérez, calcule el valor para el siguiente juego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

15. **(*) Cuadrados mágicos:** Un cuadrado mágico es una matriz de $n \times n$ con los primeros n^2 enteros consecutivos con la propiedad de que todas las filas y columnas suman igual. Resuelva para todo n.

16. Para el juego con matriz A, por experiencia u otras razones Xérez sospecha que Yérez jugará la estrategia mixta $(1/, 1/5, 1/5, 2/5)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la estrategia bayesiana de Xérez.

b) Si Yérez imagina que Xérez usará la estrategia bayesiana, qué debe jugar?

17. Dibuje el árbol de los siguientes juegos:

a1) Yérez esconde un objeto en una de dos habitaciones y no dice en cuál. Xérez elige una y busca. Si estaba en la 1ra, la encuentra con probabilidad $1/2$; en la 2da, con probabilidad $1/3$. Si elige la habitación donde no está, no la encuentra. Xérez recibe el objeto si lo encuentra, y si no, nada.

a2) Como en $a1$), pero si no lo encuentra puede elegir otra habitación (incluso la misma) y buscar de nuevo. Yérez no lo cambia de lugar.

b) Xérez tiene una moneda justa (A, cara y ceca $1/2$ cada una) y otra trucada (B, cara $1/3$, ceca $2/3$), y las distingue. Elige una, la tira, y le comunica el resultado a Yérez. Yérez debe decidir qué moneda era, si adivina gana 1, si no, 0.

18. **(*) Poker, Kuhn (1950):** Dos jugadores reciben al azar una carta cada uno de un mazo de tres $\{1, 2, 3\}$. Xérez juega o apuesta:

- Si Xérez apuesta, Yérez puede cubrir (y el que tiene la carta más alta gana 2) o pasar (Xérez gana 1).
- Si Xérez juega, Yérez puede jugar o apostar.
  - Si Xérez juega, y Yérez también, gana 1 el de la carta más alta.
  - Si Xérez juega, y Yérez apuesta, Xérez puede cubrir (y el que tiene la carta más alta gana 2) o pasar (Yérez gana 1).

Si le quedan ganas, intente resolverlo. Que le sirva de advertencia para no jugar por internet.

Para entender la recursividad hay que entender la recursividad

19. Resuelva:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & G_1 \\ G_2 & G_3 \end{pmatrix} \qquad G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

20. **(*) Inspección:** $G_{m,n}$ denota el juego en que Xérez tiene m inspecciones en n períodos de tiempo. Encuentre la estructura iterativa del juego y resuelva. Hint: $Val(G_{m,n}) = 1$ si $1 \leq n \leq m$; $Val(G_{0,n} = 0)$

21. **(*) Fibonacci:** Yérez cuenta de n a cero, restando 1 ó 2 en cada etapa. Xérez debe adivinar lo qué hará Yérez a cada etapa. Si falla, el juego termina. Si adivina correctamente a cada etapa, cobra 1 de Yérez. Encuentre la estructura iterativa del juego y resuelva, con $G_0 = (1)$, $G_1 = (1)$.

22. Resuelva la sucesión infinita:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & G_1 \end{pmatrix}, \ldots, G_n = \begin{pmatrix} n+3 & n+2 \\ n+1 & G_{n+1} \end{pmatrix}$$

Si siguen jugando de por vida, se mueren y nadie gana nada.

23. Resuelva los siguientes juegos:

a) $G = \begin{pmatrix} G & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q.$

b) $G_1 = \begin{pmatrix} G_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} G_3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} G_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q.$

24. Resuelva los siguientes juegos estocásticos:

a) $G = \begin{pmatrix} 4 & (1/3)G \\ 0 & (2/3)G \end{pmatrix}$

b) $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 + (1/2)G_2 \\ 0 & 4 + (1/2)G_2 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 + (1/2)G_1 & -4 + (1/2)G_1 \end{pmatrix}$

25. **(*)** Xérez elige un número $k = 1, 2, 3, ...$ y tira una moneda k veces (la moneda es tal que la probabilidad de que salga cara es p.) Si Xérez obtiene k caras desafia a Yérez a que obtenga la misma cantidad de caras consecutivas. Si Yérez gana cobra 1 de Xérez y si falla pierde 1. Si Xérez no obtiene k caras consecutivas, se empieza el juego otra vez pero con los roles de los jugadores intercambiados. Resuelva para todo p, y analice el límite cuando p tiende a 1.